数理解析研究所講究録
第 1961 巻 2015 年 74-80

Quantum Rabi's model and non-commutative harmonic oscillators

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所　若山正人 (述)
九州大学大学院数理学府　井上公人 (記)

November 10, 2014

1 非可換調和振動子

非可換調和振動子 (NcHO) は

$$Q := \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 \right) + \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \left(x\frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \right) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

で定義される微分作用素である. $\alpha, \beta > 0$, $\alpha\beta > 1$ のとき, Q は空間 $\mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R})$ 上での自己共役作用素となり, 正の離散スペクトル

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n <\uparrow \infty,$$

を持つ ([P]). これは, ある種の数学的動機から 1998 年に A. Parmeggiani 氏と講演者により導入された. $\alpha = \beta$ のときは, 二つの調和振動子の組とユニタリ同値となり, スペクトル $\{\sqrt{\alpha^2-1}(n+\frac{1}{2}) \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ を重複度 2 で持つ. 一般に $\alpha \neq \beta$ のときの NcHO のスペクトル解析は著しく困難である. しかし, NcHO のスペクトルゼータ関数を級数

$$\zeta_Q(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-s} \quad (\Re s > 1)$$

で定めると, これは全複素平面に有理型関数として解析接続され, $s = 1$ のみを極に持つ. また, リーマンゼータ関数と同様に負の偶数点で自明な零点を持っている ([IW1]). さらに, $\zeta_Q(2), \zeta_Q(3), \zeta_Q(4)$ から自然に定まるアペリ数の類似物が現れ, 保型性や楕円曲線との関係が示されるなど, 豊富な数論的性質を有することが分かっている ([KW1], [KW2], [LOS], [W2]).

1.1 Heun の微分方程式

NcHO のスペクトル問題 $Q\varphi = \lambda\varphi$ は, 4 つの確定特異点 $w = 0, 1, \alpha\beta, \infty$ を持つ 2 階の Heun 型微分方程式の, ある複素領域上の正則関数解と同値である. 次の Theorem のうち, 奇関数の方は [O] によって知られていた.

Theorem 1.1 ([W1]). 次の線形同型写像が存在する:

$$\mathrm{Even}: \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2) \mid Q\varphi = \lambda\varphi, \varphi(-x) = \varphi(x)\} \xrightarrow{\sim} \{f \in \mathcal{O}(\Omega) \mid H_\lambda^+ f = 0\},$$
$$\mathrm{Odd}: \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2) \mid Q\varphi = \lambda\varphi, \varphi(-x) = -\varphi(x)\} \xrightarrow{\sim} \{f \in \mathcal{O}(\Omega) \mid H_\lambda^- f = 0\}.$$

ここで $\Omega \subset \mathbb{C}$ は $0, 1 \in \Omega, \alpha\beta \notin \Omega$ を満たす単連結領域で, $\mathcal{O}(\Omega)$ は Ω 上の正則関数全体の集合である. $H_\lambda^\pm = H_\lambda^\pm(w, \partial_w)$ はそれぞれ *Heun* の常微分作用素で, 次で定義される:

$$H_\lambda^+(w, \partial_w) := \frac{d^2}{dw^2} + \left(\frac{\frac{1}{2}-p}{w} + \frac{-\frac{1}{2}-p}{w-1} + \frac{p+1}{w-\alpha\beta} \right) \frac{d}{dw} + \frac{-\frac{1}{2}(p+\frac{1}{2})w - q^+}{w(w-1)(w-\alpha\beta)},$$
$$H_\lambda^-(w, \partial_w) := \frac{d^2}{dw^2} + \left(\frac{1-p}{w} + \frac{-p}{w-1} + \frac{p+\frac{3}{2}}{w-\alpha\beta} \right) \frac{d}{dw} + \frac{-\frac{3}{2}pw - q^-}{w(w-1)(w-\alpha\beta)},$$

ここで $p=p(\nu), \nu=\nu(\lambda)$ は次の関係式で定義される.

$$p=\frac{2\nu-3}{4}, \quad \nu=\frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}}\lambda.$$

また, これらの *Heun* の作用素のアクセサリパラメータ $q^{\pm}=q^{\pm}(\lambda)$ は α,β と λ によって次のように表される.

$$q^{+}=\left\{\left(p+\frac{1}{2}\right)^{2}-\left(p+\frac{3}{4}\right)^{2}\left(\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\right)^{2}\right\}(\alpha\beta-1)-\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right),$$
$$q^{-}=\left\{p^{2}-\left(p+\frac{3}{4}\right)^{2}\left(\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\right)^{2}\right\}(\alpha\beta-1)-\frac{3}{2}p.$$

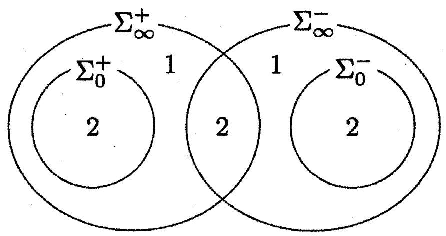
□

1.2 スペクトルの構造

[PW2] で固有関数を変形した形のエルミート関数で展開し, 固有値と固有関数の連分数展開を与えた. NcHO の固有関数 $\varphi\in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^2)$ が有限個のエルミート関数で展開されるとき, φ を有限型と言う. また, NcHO の固有値 λ が有限型の固有関数に対応しているとき, λ を有限型と言う. 有限型でない固有関数及び固有値を無限型と言う. 有限型 (resp. 無限型) の固有値全体を Σ_0 (resp. Σ_∞) で表す. 同様に, $\varphi(-x)=\pm\varphi(x)$ を満たす固有関数に対応する固有値の集合をそれぞれ Σ^+,Σ^- と書く. 以上より, 次のような NcHO の固有値の分類を考える:

$$\Sigma_0^{\pm}:=\Sigma_0\cap\Sigma^{\pm}, \quad \Sigma_\infty^{\pm}:=\Sigma_\infty\cap\Sigma^{\pm}.$$

定義より, これら 4 つの集合は互いに共通部分を持ち得ることに注意する.
[NNW], [PW2] と上の Theorem 1.1 を用いることにより, NcHO のスペクトルについて以下の図で表される関係が分かっている. 図中の各領域の中の数字は, そこに属す固有値の重複度である.



[HS] で基底ベクトルの固有値は重複度が 1 であり, Σ_∞^+ に属すことが示されている. また, 有限型の固有値について以下が分かっている ([W1]).

$$\Sigma_0^+\subset\left\{\lambda=2\frac{\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}}{\alpha+\beta}(2L+\frac{1}{2})\;\middle|\;L\in\mathbb{N}\right\}, \quad \Sigma_0^-\subset\left\{\lambda=2\frac{\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}}{\alpha+\beta}(2L+\frac{3}{2})\;\middle|\;L\in\mathbb{N}\right\}.$$

2 量子ラビ模型

量子ラビ模型は量子情報技術を目指す実験の理論背景となっており, 次のハミルトニアンで記述される.

$$H_{\mathrm{Rabi}}/\hbar=\omega a^\dagger a+\Delta\sigma_z+g\sigma_x(a^\dagger+a). \tag{2.1}$$

ここで $a^\dagger=(x-\partial_x)/\sqrt{2},\ a=(x+\partial_x)/\sqrt{2}$ は角振動数 ω のボゾニックモードに対する生成消滅演算子, $\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}, \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ は二準位系に対するパウリ行列, $g>0$ は二準位系とボゾニックモードの間の結合強度, $2\Delta>0$ は二準位間のエネルギー差である. 以下, 一般性を失わずに $\hbar=\omega=1$ とする.

2.1 Heunの微分方程式

Bargmann 変換 $\mathcal{B}$ を

$$(\mathcal{B}f)(x)=\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{2\pi xz-\pi x^2-\frac{\pi}{2}z^2}dx$$

で定める. $\mathcal{B}$ により, 以下のような生成消滅演算子の変換

$$a^\dagger=(x-\partial_x)/\sqrt{2}\to z,\quad a=(x+\partial_x)/\sqrt{2}\to\partial_z$$

が引き起こされ, H_{Rabi} から 1 階の微分方程式系

$$H_{\mathrm{Rabi}}\to\begin{pmatrix} z\partial_z+\Delta-\lambda & g(z+\partial_z)\\ g(z+\partial_z) & z\partial_z-\Delta-\lambda\end{pmatrix}\tag{2.2}$$

が与えられる. これを 1 次元に書き直すことにより, シュレディンガー方程式 $H_{\mathrm{Rabi}}\varphi=E\varphi$ は次の 2 階微分方程式に帰着される.

$$\frac{d^2f}{dz^2}+p(z)\frac{df}{dz}+q(z)f=0,$$

$$p(z)=\frac{(1-2E-2g^2)z-g}{z^2-g^2},\quad q(z)=\frac{-g^2z^2+gz+E^2-g^2-\Delta^2}{z^2-g^2}.$$

さらに $f(w)=e^{-gz}\phi(x)$, $x=(g+z)/2g$ とおくことで, $\phi(x)$ に関する合流型 Heun 微分方程式 $H_1^{\mathrm{Rabi}}\phi=0$,

$$H_1^{\mathrm{Rabi}}:=\frac{d^2}{dx^2}+\left(-4g^2+\frac{1-(E+g^2)}{x}+\frac{1-(E+g^2+1)}{x-1}\right)\frac{d}{dx}+\frac{4g^2(E+g^2)x+\mu}{x(x-1)},\tag{2.3}$$

$$\mu=(E+g^2)^2-4g^2(E+g^2)-\Delta^2$$

が得られる. 同様に, $f(w)=e^{gz}\phi(x)$, $x=(g-z)/2g$ とおくことで, 対応する方程式 $H_2^{\mathrm{Rabi}}\phi=0$ が得られる.

Remark 2.1. 量子ラビ模型から Bargmann 変換により (2.2) が得られたのに対し, NcHO からは 2 階の方程式系が出る. これが NcHO の解析がより困難である理由の一つである.

2.2 スペクトル解析

近年, この量子ラビ模型の可解性が Braak によって示され, そのスペクトルが以下のように分類された ([B], [K]).

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}(H_{\mathrm{Rabi}})=&\{(\text{非退化})\text{ 正則スペクトル}\}\sqcup\{\text{退化例外型スペクトル}\}\sqcup\{\text{非退化例外型スペクトル}\}\\ =&\{E_n^{\pm}=x_n^{\pm}-g^2\mid G_{\pm}(x_n^{\pm})=0\ (n=0,1,2,\dots)\}\\ &\sqcup\{E_N^{\deg}=N-g^2\mid {}^{\exists}N\in\mathbb{Z},\ \mathrm{mult}=2\}\sqcup\{E_N=N-g^2\mid {}^{\exists}N\in\mathbb{Z},\ \mathrm{mult}=1\}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

ここで Braak の transcendental function $G_{\pm}(x)$ は

$$G_{\pm}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}K_n(x)\left[1\mp\frac{\Delta}{x-n}\right]g^n$$

で定義され, $K_n(x)$ は次の漸化式で定義される:

$$K_0=1,\ K_1=f_0(x),\ nK_n(x)=f_{n-1}(x)K_{n-1}(x)-K_{n-2}(x),$$

$$f_n(x)=2g+\frac{1}{2g}\left(n-x+\frac{\Delta^2}{x-n}\right).$$

特に, 退化例外型スペクトル $E_N^{\deg}$ が存在する必要十分条件 $K_N(N)=0$ がパラメータ $g,|\Delta|$ で与えられる.

3 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ の oscillator 表現による記述

3.1 Oscillator 表現の実現

リー環 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ の基底 H, E, F が

$$[H,E]=2E, \quad [H,F]=-2F, \quad [E,F]=H$$

を満たすとし, $a \in \mathbb{R}$ に対し, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ の作用 ϖ_a を

$$\varpi_a(H)=z\partial_z+\frac{1}{2},\ \varpi_a(E)=\frac{1}{2}z^2(z\partial_z+a),\ \varpi_a(F)=-\frac{1}{2z}\partial_z+\frac{a-1}{2z^2}$$

で定める.

$$\varpi_{j,a}:=\varpi_a|_{\mathbf{V}_{j,a}}\ (j=1,2),$$
$$\mathbf{V}_{1,a}:=x^{-\frac{1}{4}}\mathbb{C}[x,x^{-1}], \quad \mathbf{V}_{2,a}:=x^{\frac{1}{4}}\mathbb{C}[x,x^{-1}]$$

とおくと, $(\varpi_{j,a},\mathbf{V}_{j,a})$ はそれぞれ $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ の表現を定める.

パラメータ $(\kappa,\varepsilon,\nu)\in\mathbb{R}^3_{>0}$ に対し, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ の普遍包絡環 $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$ の 2 次の元 $\mathcal{R}$ を

$$\mathcal{R}:=\frac{2}{\sinh 2\kappa}\left\{[(\sinh 2\kappa)(E-F)-(\cosh 2\kappa)H+\nu](H-\nu)+(\varepsilon\nu)^2\right\}\in\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$$

で定める. 以下, $\mathcal{R}$ の作用から NcHO が捉えられ, 量子ラビ模型がその Heun 型微分方程式の合流操作によって得られることを述べる:

$$\begin{tikzcd}
\text{NcHO} & \mathcal{R}\in\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})) \arrow[l, "\pi_1', \pi_2'"'] \arrow[r, "\mathcal{L}_a", "\pi_a'(\cong\varpi_a)"'] & \text{Heun ODE} \arrow[d, Rightarrow, "\text{Confluence process}"] & \\
& \mathcal{K}\in\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})) \arrow[r, "\varpi_a"] & \text{Confluent Heun ODE} & \sim \text{Rabi model.}
\end{tikzcd}$$

3.2 NcHO

$\alpha\neq\beta, \lambda>0$ に対し, パラメータ $(\kappa,\varepsilon,\nu)\in\mathbb{R}^3_{>0}$ を次で定める.

$$\cosh\kappa=\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta-1}}, \quad \varepsilon=\left|\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right|, \quad \nu=\frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}}\lambda.$$

このとき定まる $\mathcal{R}\in\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$ の作用として, NcHO のスペクトル問題の偶関数部分と同値な Heun 作用素 H^+_λ が現れる ([W1]).

Theorem 3.1. $w:=z^2\coth\kappa$ とすると,

$$\varpi_1(\mathcal{R})=4(\tanh\kappa)w(w-1)(w-\alpha\beta)H^+_\lambda(w,\partial_w),$$
$$\varpi_2(\mathcal{R})=4(\tanh\kappa)w(w-1)(w-\alpha\beta)H^-_\lambda(w,\partial_w).$$

3.3 量子ラビ模型

3.3.1 Heun 型方程式の合流操作からの導出

一方, $a\in\mathbb{Z}$ に対し,

$$z^{-a+1}\varpi_a(\mathcal{R})z^{a-1}=4(\tanh\kappa)w(w-1)(w-t)H^a(w,\partial_w)$$

となる. ここで $t=\coth^2\kappa$,

$$H^a(w,\partial_w)=\frac{d^2}{dw^2}+\left(\frac{3-2\nu+2a}{4w}+\frac{-1-2\nu+2a}{4(w-1)}+\frac{-1+2\nu+2a}{w-t}\right)\frac{d}{dw}+\frac{-\frac{1}{2}(a-\frac{1}{2})(a-\frac{1}{2}-\nu)w-q_a}{w(w-1)(w-\alpha\beta)},$$

$$q_a = \left\{-(a-\frac{1}{2}-\nu)^2+(\varepsilon\nu)^2\right\}(t-1)-2(a-\frac{1}{2})(a-\frac{1}{2}-\nu)$$

である．今，$H^a(w,\partial_w)$ の表示において $(a,\nu)\to(a+p,\nu+p)$ という置き換えをし，二つの確定特異点 $w=t$ と $w=\infty$ の合流操作を

$$t=\rho^{-1},\ p=4g^2\rho^{-1}-(a+\frac{1}{2}),\qquad \lim_{\substack{\rho\to 0\\ (\Leftrightarrow p\to\infty)}} w(w-1)(w-t)\rho H^a(w,\partial_w) \tag{3.1}$$

によって行う．更に $E+g^2=\frac{1}{4}(1+2\nu-2a)$ を満たすように a,ν をとると，シュレディンガー方程式 $H_{\mathrm{Rabi}}\varphi=E\varphi$ と同値な 2 階の微分方程式 (2.3) が得られる ([W1])．

Remark 3.1. 発見的に施された上の合流操作 (3.1) がどういう意味を持つのか，広く助言を求めたい．

3.3.2 合流操作を経ない導出と退化例外型スペクトルの記述

合流操作を経ずに，(2.3) の H_1^{Rabi} や H_2^{Rabi} を直接捉える $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$ の 2 次の元 $\mathcal{K},\tilde{\mathcal{K}}$ が見つかる．

Theorem 3.2. *$a=-(E+g^2)$ のとき，*

$$H_1^{\mathrm{Rabi}}=(x(x-1))^{-1}x^{-\frac{1}{2}(a-\frac{1}{2})}(\varpi_a(\mathcal{K})-\Lambda_a)x^{\frac{1}{2}(a-\frac{1}{2})}.$$

$a=1-(E+g^2)$ のとき，

$$H_2^{\mathrm{Rabi}}=(x(x-1))^{-1}x^{-\frac{1}{2}(a-\frac{1}{2})}\left(\varpi_a(\tilde{\mathcal{K}})-\tilde{\Lambda_a}\right)x^{\frac{1}{2}(a-\frac{1}{2})}.$$

ここで，$\Lambda_a,\tilde{\Lambda_a}\in\mathbb{R}$ は a,E,g から定まる定数である． □

$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ の有限次元既約表現の枠組みの中で，退化例外型スペクトルに対応する固有関数が構成される ([WY])．$e_{1,n}:=x^{n-\frac{1}{4}}$ とおくと，表現 $(\varpi_{1,a},\mathbf{V}_{1,a})$ は

$$\mathbf{V}_{1,a}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}e_{1,n}\quad\text{(spherical principal series)},$$

$$\varpi_{1,a}(H)e_{1,n}=2ne_{1,n},\quad \varpi_{1,a}(E)e_{1,n}=\left(n+\frac{a}{2}\right)e_{1,n+1},\quad \varpi_{1,a}(F)e_{1,n}=\left(-n+\frac{a}{2}\right)e_{1,n-1}$$

と書ける．$m\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し，$\mathbf{V}_{1,a}$ の部分空間 $\mathbf{W}_{1,m}^{\pm},\mathbf{F}_{1,m}$ を

$$\mathbf{W}_{1,m}^{\pm}:=\bigoplus_{n\geq m}\mathbb{C}e_{1,\pm n},\quad \mathbf{F}_{1,m}:=\bigoplus_{-m<n<m}\mathbb{C}e_{1,n}$$

で定める．$\mathbf{W}_{1,m}^{\pm}$ は良く知られている $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ の正則 (反正則) 離散系列と同値である．

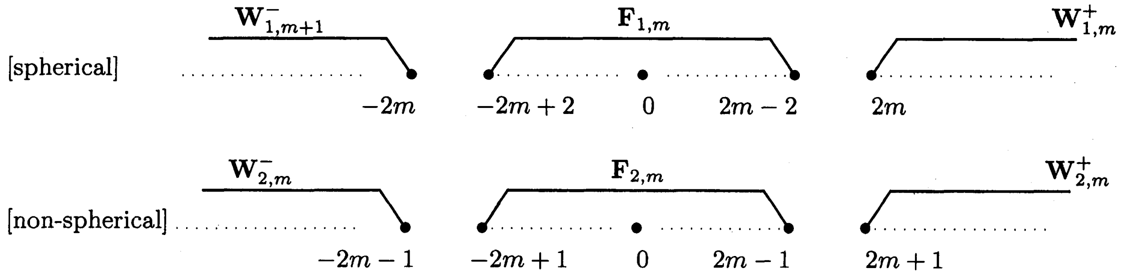


Figure 1: $\mathbf{V}_{j,a}$ $(a\in\mathbb{Z})$ の Weight decomposition

Lemma 3.3. *$m\in\mathbb{Z}_{>0}$ とする．*

1. *$a=2m$ のとき，$\mathbf{W}_{1,m}^{\pm}$ は $\mathbf{V}_{1,a}$ の既約部分空間である．*

2. $a = 2 - 2m$ のとき, $\mathbf{F}_{1,m}$ は $\mathbf{V}_{1,a}$ の既約部分空間である. このとき, 離散系列 $\mathbf{W}^{\pm}_{1,m}$ は商空間

$$\mathbf{V}_{1,a}/\mathbf{F}_{1,m} \cong \mathbf{W}^{-}_{1,m} \oplus \mathbf{W}^{+}_{1,m}$$

の既約成分として実現される.

奇数の $a \in \mathbb{Z}$ に対しても, $\mathbf{V}_{2,a} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}e_{2,n}$ $(e_{2,n} := x^{n+\frac{1}{4}})$ において同様の事実が述べられる. □

Corollary 3.4. $N = 2m$ または $2m-1$ $(m \in \mathbb{Z})$ とする. 量子ラビ模型の退化例外型スペクトル E_N^{deg} に対応する *Heun* 型方程式 $H_j^{\mathrm{Rabi}}\phi = 0$ $(j = 1, 2)$ の解が, $\mathbf{F}_{1,m}, \mathbf{F}_{2,m}$ の中で構成される. □

一方, 非退化例外型スペクトル E_N の存在も [MPS] で数値的に示唆されている. 予想として, E_N の固有関数が離散系列 $\mathbf{W}^{\pm}_{1,m}$ の中で捉えられると考えられる.

Remark 3.2. $\mathcal{K}$ と $\mathcal{R}$ の直接の関係は分かっていない. また, NcHO の縮退固有値の表現論的解釈も今後の課題である.

Remark 3.3 (スペクトルゼータ関数と Braak の $G_\pm(z)$). ラビ模型の Hurwitz 型のスペクトルゼータ関数

$$\zeta_{\mathrm{Rabi}}(s, z) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(H_{\mathrm{Rabi}})} (z - \lambda)^{-s} \quad (\Re s > 1,\ z \in \mathbb{C})$$

を考えると, これは $\Re s > 1$ で正則関数を定めることが分かる. 今, $\zeta_{\mathrm{Rabi}}(s, z)$ が $s = 0$ の近傍まで正則関数として解析接続できると仮定する (おそらく正しいが, 正確には確信していない). すると次のようなゼータ正規化積

$$\prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}(H_{\mathrm{Rabi}})} (z - \lambda) := \exp\left(-\frac{d}{ds}\zeta_{\mathrm{Rabi}}(0, z)\right) \tag{3.2}$$

が定義できる. $G_\pm(z)$ は Braak によって構成された, ラビ模型の正則スペクトルを零点に持つ関数であったので, (3.2) と $G_\pm(z)$ の商をとることで, 例外型スペクトルについての正規化積 $\prod_{E_n^{\mathrm{deg}}, E_n \in \mathrm{Spec}(H_{\mathrm{Rabi}})}(z - n)$ の解析ができると考えられる.

References

[B] D. Braak, On the Integrability of the Rabi Model, Phys. Rev. Lett. **107** (2011), 100401–100404.

[HS] F. Hiroshima and I. Sasaki, *Spectral analysis of non-commutative harmonic oscillators: The lowest eigenvalue and no crossing*, preprint 2013 (arXiv:1304.5578v1).

[IW1] T. Ichinose and M. Wakayama, *Zeta functions for the spectrum of the non-commutative harmonic oscillators*, Comm. Math. Phys. **258** (2005), 697–739.

[IW2] T. Ichinose and M. Wakayama, *Special values of the spectral zeta function of the non-commutative harmonic oscillator and confluent Heun equations*, Kyushu J. Math. **59** (2005), 39–100.

[IW3] T. Ichinose and M. Wakayama, *On the spectral zeta function for the noncommutative harmonic oscillator*, Rep. Math. Phys. **59** (2007), 421–432.

[KW1] K. Kimoto and M. Wakayama, *Apéry-like numbers arising from special values of spectral zeta functions for non-commutative harmonic oscillators*, Kyushu J. Math. **60** (2006), 383–404.

[KW2] K. Kimoto and M. Wakayama, *Elliptic curves arising from the spectral zeta function for non-commutative harmonic oscillators and $\Gamma_0(4)$-modular forms*, in "Proceedings Conf. *L*-functions" (eds. L. Weng, M. Kaneko), 201–218, World Scientific, 2007.

[K] M. Kus, *On the spectrum of a two-level system*, J. Math. Phys., **26** (1985) 2792–2795.

[LOS] L. Long, R. Osburn, H. Swisher, *On a conjecture of Kimoto and Wakayama*, arXiv:1404.4723v1 [math.NT].

[MPS] A. J. Maciejewski, M. Przybylska, T. Stachowiak, *Full spectrum of the Rabi model*, Phys. Lett. A **378** 1620, 2014.

[NNW] K. Nagatou, M. T. Nakao and M. Wakayama. *Verified numerical computations for eigen-values of non-commutative harmonic oscillators*, Numer. Funct. Anal. Opti. **23** (2002), 633–650.

[O] H. Ochiai, *Non-commutative harmonic oscillators and Fuchsian ordinary differential operators*, Comm. Math. Phys. **217** (2001), 357–373.

[P] A. Parmeggiani, Spectral Theory of Non-commutative Harmonic Oscillators: An Introduction. Lecture Notes in Math. **1992**, Springer, 2010.

[PW1] A. Parmeggiani and M. Wakayama, *Oscillator representations and systems of ordinary differential equations*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **98** (2001), 26–30.

[PW2] A. Parmeggiani and M. Wakayama, *Non-commutative harmonic oscillators-I, II, Corrigenda and remarks to I*, Forum. Math. **14** (2002), 539–604, 669–690, ibid **15** (2003), 955–963.

[R] A. Ronveaux (eds.), Heun's Differential Equations, Oxford University Press, 1995.

[W1] M. Wakayama, *Equivalence between the eigenvalue problem of non-commutative harmonic oscillators and existence of holomorphic solutions of Heun differential equations, eigenstates degeneration and the Rabi model*, Preprint 2014, Kyushu University.

[W2] M. Wakayama, *Remarks on quantum interaction models by Lie theory and modular forms via non-commutative harmonic oscillators*, in "Mathematical Apprach to Research Problems of Science and Technology – Theoretical Basis and Developments in Mathematical Modeling" eds. R. Nishii et al., Mathematics for Industry Vol. 5, Springer, 17–34, 2014.

[WY] M. Wakayama and T. Yamasaki, *The quantum Rabi model and Lie algebra representations of* $\mathfrak{sl}_2$, J. Phys. A: Math. Theor **47** (2014).